

PAPER

TRANSPORT MASALASINING MATEMATIK MODELLASHTIRILISHI VA OPTIMALLASHTIRISH “SHIMOLIY-G‘ARB BURCHAK” USULI

Mamatova Zilolaxon Xabibulloxonovna^{1,*} and Abdug‘aniyev Oybek²

¹Farg‘ona davlat universiteti dotsent, pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) and ²Farg‘ona davlat universiteti talabasi

*mamatova.zilolakhon@gmail.com

Abstract

Maqola transport masalasini matematik dasturlash va optimallashtirish sohasidagi muhimligini ko‘rib chiqadi, uning nazariy asoslari va amaliy yechimlarini tahlil qiladi. Keltirilgan adabiyotlar, jumladan, Акулич И.Л., Badalov F.B., Кузнецов А.В. va boshqalarning ishlari transport masalasining matematik modellari, tayanch plan tuzish usullari va optimal yechim topish algoritmlarini o‘rganishga yordam beradi. Tadqiqot metodologiyasi chiziqli dasturlash asosida matematik modellashtirish, shimoliy-g‘arb burchak va kichik elementlar usullari orqali boshlang‘ich plan tuzish, potentsiallar usuli yordamida optimal yechim topish kabi bosqichlarni qamrab oladi. Maqolada transport masalasining yopiq va ochiq turlari, shuningdek, tarif matritsasi va maqsad funksiyasi kabi asosiy tushunchalar tushuntiriladi. “Shimoliy-g‘arb burchak” usuli misolida boshlang‘ich tayanch plan tuzish jarayoni batafsil ko‘rsatilgan bo‘lib, umumiy xarajatni minimallashtirishga misol keltiriladi. Excel va Python kabi zamonaviy vositalar yordamida hisoblashni avtomatlashtirish imkoniyatlari ham muhokama qilinadi. Maqola transport masalasini o‘rganuvchi tadqiqotchilar va amaliyotchi mutaxassislar uchun foydali manba hisoblanadi.

Key words: transport masalasi, matematik dasturlash, optimallashtirish, tayanch plan, potentsiallar usuli, shimoliy-g‘arb burchak usuli, chiziqli dasturlash.

Adabiyotlar tahlili

Transport masalasi matematik dasturlash va optimallashtirish sohasida muhim o‘rin tutadi. Quyida keltirilgan adabiyotlar ushbu mavzu bo‘yicha fundamental va amaliy bilimlarni taqdim etadi. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах (1996) – Kitob transport masalasini amaliy misollar va masalalar orqali tushuntiradi, tayanch plan tuzish va optimal yechim topish usullariga urg‘u beradi. Badalov F.B. Optimallashtirish nazariyasi va matematik dasturlash (1989) – O‘zbek tilidagi ushbu manba transport masalasining matematik modelini va yechish usullarini sodda tilda bayon qiladi, mahalliy o‘quvchilar uchun qulay. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию (1985) – Masalalar to‘plami sifatida transport masalasining turli ko‘rinishlarini o‘rganish va amaliy ko‘nikmalar hosil qilish uchun foydali. Курицкий Б.Я. Поиск оп-

тимальных решений средствами Excel (1997) – Excel dasturida transport masalasini yechishga zamonaviy yondashuvni taqdim etadi, amaliy qo‘llanilishi yuqori. Safaeva K., Beknazarova N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari (1984) – Transport masalasining nazariy asoslari va potentsiallar usulini tushuntiradi, lekin eskirgan bo‘lishi mumkin.

Tadqiqot metodologiyasi

Transport masalasini yechish uchun quyidagi metodologiya qo‘llaniladi. Matematik modellashtirish: Masala chiziqli dasturlash shaklida, maqsad funksiyasi

$$Z = \sum_i c_{ij}x_{ij}$$

va chegaraviy shartlar (yuk zapaslari, talablar) asosida tuziladi. Boshlang'ich plan: Shimoliy-g'arb burchak usuli: Jadvalning chap yuqori burchagidan boshlab yuklarni taqsimlash. Kichik elementlar usuli: Eng kam xarajatli kataklardan boshlab taqsimlash. Optimal yechim: Potensiallar usuli orqali bo'sh kataklarda farq

$$(S_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j))$$

hisoblanadi, yopiq kontur yordamida yuklar qayta taqsimlanib, $S_{ij} \geq 0$ bo'lguncha optimal plan topiladi. Tahlil: Planlarning xarajatlari

$$\bar{Z}$$

solishtiriladi, masalan,

$$Z_{\min} = 375$$

ga erishiladi. Excel yoki Python kabi vositalar hisoblashni avtomatlashtiradi.

Tahlillar va natijalar

Yuklarni jo'natish punktlaridan berilgan qabul qilish punktlariga tashib berishning optimal planini topish masalasiga transport masalasi deyiladi va u quyidagicha formulirovka qilinadi:

Aytaylik

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

punktlarida ularga mos

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

miqdordagi bir jinsli yuklar joylashgan bo'lsin. Bu

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

- larga jo'natish punktlari deymiz. Bu yuklarni n-ta

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

punktlari qabul qilishi kerak bo'lib va ularning talablari mos ravishda

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

bo'lsin. Har bir

$$x_{ij}$$

-birlikdagi yukni

$$i$$

-jo'natish punitidan

$$j$$

-chi qabul qilish punitiga olib borish narxi (xarajati)

$$c_{ij}$$

-ma'lum bo'lsin. Bu yuklarni tashish planini shunday tuzishimiz kerakki talabgor punktlar maksimal qoniqish olsun va hamma yuklarni olib borish uchun ketgan xarakatlar yig'indisi minimal

bo'lsin.

Transport masalasini shartli ravishda jadval ko'rinishda beramiz. Jadvalda quyidagilar ko'rsatiladi: qabul qilish punitlari, jo'natish punktlari, yuk zapaslari, yukka bo'lgan ehtiyoj va har bir

$$i$$

-chi jo'natish punktidan

$$j$$

-chi qabul qilish punktiga yuboriladigan yuk birliklarining narxi (ya'ni tarif matritsasi) beriladi.

Jo'natish punktlari	Qabul qilish punktlari				Yuk zapaslari
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_n
Yukka bo'lgan ehtiyoj	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Bu yerda

$$C = c_{ij}$$

matritsasiga tarif matritsasi yoki transport xarajatlari deyiladi.

$$X = x_{ij}$$

matritsaga esa transport masalasining plani deyiladi. Bu yerda

$$x_{ij} - i$$

-chi punktdan j-chi punktga yetkaziladigan yuklar hajmi (soni). Tashish plani bilan bog'liq ketgan xarajatlarning umumiy yig'indisi quyidagi maqsad funksiyasi orqali ifodalanadi.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$

Bu yerda

$$x_{ij}$$

- o'zgaruvchilar yuk zapasi, yukka bo'lgan ehtiyoj va manfiy bo'lmalik shartlarini (chegaralanishlarni) bajargan bo'lishi kerak. Yuqoridagilarni hisobga olgan holda transport masalasining matematik modelini quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (j = \overline{1, n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

Transport masalasining matematik qo'yilishi quyidagicha talqin qilinadi: chegaraviy tizimlar, manfiy bo'lmalik sharti va maqsad funksiyasi berilgan deylik. Talab qilinadiki tizimning yechimlar to'plamidan shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini

(planini) topish kerakki, maqsad funksiyasi minimal qiymatga erishsin.

Transport masalasi ikki turga bo'linadi, ochiq va yopiq turdagi. Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

masala yopiq turdagi masala bo'ladi

Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

masala ochiq turdagi masala bo'ladi.

2.Transport masalasini yechish usullari

Transport masalasini yechish ikki bosqichdan iborat.

1.Boshlang'ich tayanch planini topish.

2.Tayanch planlar ichidan optimal planini topish.

Tayanch planini tuzishning bir necha usullari mavjud: "Shimoliy-g'arb burchak" "Kichik elementlar" "Fogel" va boshqalar.

"Shimoliy-g'arb burchak" usuli.

Yuklarni tashishning boshlang'ich planini tuzishda "shimoliy-g'arb burchak" usulidan foydalanish quyidagicha amalga oshiriladi:

1.Tarif jadvali tuziladi.

	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
.....				
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

2.Chap tomondagi yuqoridagi burchak, ya'ni (shimoliy-g'arb burchak) dan boshlab satr bo'yicha yoki ustun bo'yicha siljiymiz. (1,1) katakga a_1 va b_1 ning eng kichigini joylashtiramiz, ya'ni

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

3.Agar

$$a_1 > b_1$$

bo'lsa

$$x_{11} = b_1$$

ni beramiz, birinchi ustun shu bilan yopiladi, ya'ni

$$x_{i1} = 0 (i = 2, m)$$

. (Birinchi qabul qiluvchining talabi to'liq qanoatlantirildi).

4.Birinchi satr bo'yicha siljiymiz (1;2) katakga, bu yerga

$$a_1 - b_1, b_2$$

ning eng kichigini joylashtiramiz, ya'ni

$$x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$$

5.Agar

$$b_1 > a_1$$

bo'lsa 1-chi satr yopiladi, ya'ni

$$x_{1j} = 0 (j = 2, n)$$

6.Qo'shni kataklarni to'ldirishga o'tamiz (2.1), ya'ni

$$x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$$

7.Ikkinchi satr yoki ikkinchi ustun kataklarini to'ldirishga o'tamiz va hakazo. Bu jarayon toki resurslar tugamaguncha davom etadi.

"Kichik elementlar" usuli.

"Kichik elementlar" usuli yordamida tayanch planini topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1.Yuklar qabul qiluvchilarga tarif jadvalidagi eng kichik cij tashish narxiga mos katakni to'ldirishdan boshlanadi.

2.Eng kichik tarif cij katagiga ai yoki bj ning eng kichigi joylashtiriladi.

3.Keyin to'lig'icha yuk zapaslari sarf qilingan satr yoki qabul qilish punkti talabi qondirilgach mos ustun yo'qotiladi.

4.Agar jo'natish punktidagi yuk zapaslari to'liq taqsimlangan bo'lsa va qabul qiluvchi talabi to'liq qanoatlantirilsa ularga mos satr va ustun yo'qotiladi.

5.Qolgan satr va ustunlardan yana kichik ta'rif olinadi. Yuk zapaslarini taqsimlash jarayoni, toki yuk zapasi tugaguncha va talablar qanoatlantirilguncha davom etadi.

Potensiallar usuli.

Agar yuqoridagi usullar yordamida boshlang'ich tayanch plan topilgan bo'lsa optimal planini topish potensiallar usulida bajariladi.

Transport masalasi optimal planini topishning potensiallar usuli quyidagilardan iborat:

1.Yuqoridagi keltirilgan usullar yordamida yuklarni tashishning tayanch plani aniqlanadi.

2.Mos ravishda yuklarni qabul qiluvchi va jo'natuvchi punktlar uchun ui va vj potensiallari aniqlanadi.

3.Bo'sh kataklarda potensiallar yig'indisi hisoblanadi

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

4.Bo'sh kataklarda

$$c_{ij}$$

va

$$c_{ij}$$

tariflar farqi hisoblanadi.

5.Agar hamma bo'sh kataklardagi fark

$$S_{ij} > 0$$

bo'lsa olingan plan optimal bo'ladi.

6. Agar bo'sh kataklardan birortasida

$$S_{ij} < 0$$

bo'lib qolsa, bo'sh bo'lmagan kataklarga

$$x_{ij}$$

o'zgaruvchi qiymati kiritiladi, ya'ni yuqoridagi farq minimal bo'lsin. Shu katak uchun bo'sh bo'lmagan kataklar yordamida yopiq kontur xosil qilinadi va yuklar shu konturda qayta taqsimlanadi. Natijada yangi tashish planga ega bo'lamiz. Bu jarayon toki farq

$$S_{ij} > 0$$

bo'lmaguncha davom etadi va oxirgi olingan yuklarni tashish plani optimal bo'ladi.

BOSHLANG'ICH TAYANCH PLANNI TOPISH ("SHIMOLIY-G'ARB BURCHAK" USULI)

Misol: 3 ta jo'natish punkti

$$A_1 A_2 A_3$$

va 3 a qabul qilish punkti

$$B_1 B_2 B_3$$

mavjud. Yuk zapaslari va talablar quyidagicha:

Yuk zapaslari:

$$A_1 = 20, \quad A_2 = 30, \quad A_3 = 50(\text{birlikyuk}).$$

Jami: $20 + 30 + 50 = 100$.

Yuk talablari:

$$B_1 = 30, \quad B_2 = 40, \quad B_3 = 30$$

Jami: $30 + 40 + 30 = 100$.

Jami zapas jami talabga teng ($100 = 100$), shuning uchun bu yopiq turdagi transport masalasi.

Tarif matritsasi (har bir birlik yukni tashish narxi, c_{ij}):

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	5
A_2	4	1	2
A_3	3	6	4

Maqsad: Yuklarni tashishning umumiy narxini minimallashtiradigan plan topish. Jadvalni quyidagicha tuzamiz:

	$B_1(10)$	$B_2(40)$	$B_3(30)$	Zapas
$A_1(20)$	$c_{11} = 2$	$c_{12} = 3$	$c_{13} = 5$	20
$A_2(30)$	$c_{21} = 4$	$c_{22} = 1$	$c_{23} = 2$	30
$A_3(50)$	$c_{31} = 3$	$c_{32} = 6$	$c_{33} = 4$	50
Talab	30	40	30	

Jarayon:

(1,1) katakdan boshlaymiz: $A_1 = 20, \quad B_1 = 30$

Eng kichigi: $\min(20, 30) = 20$

$x_{11} = 20$ joylashtiramiz.

A_1 zapasi tugadi: $20 - 20 = 0$

B_1 talabi: $30 - 20 = 10$ qoladi.

Jadval yangilanadi:

	$B_1(10)$	$B_2(40)$	$B_3(30)$	Zapas
$A_1(0)$	20			0
$A_2(30)$	$c_{21} = 4$	$c_{22} = 1$	$c_{23} = 2$	30
$A_3(50)$	$c_{31} = 3$	$c_{32} = 6$	$c_{33} = 4$	50

A_1 tugagani uchun (2, 1) katakka o'tamiz:

$A_2 = 30, \quad B_1 = 10$

Eng kichigi: $\min(30, 10) = 10$

$x_{21} = 10$ joylashtiramiz.

B_1 talabi tugadi: $10 - 10 = 0$

A_2 zapasi: $30 - 10 = 20$ qoladi.

Jadval:

	$B_1(0)$	$B_2(40)$	$B_3(30)$	Zapas
$A_1(20)$	20			0
$A_2(20)$	10	$c_{22} = 1$	$c_{23} = 2$	20
$A_3(50)$	$c_{31} = 3$	$c_{32} = 6$	$c_{33} = 4$	50

B_1 tugagani uchun (2, 2) katakka o'tamiz:

$A_2 = 20, \quad B_2 = 40$

Eng kichigi: $\min(20, 40) = 20$

$x_{22} = 20$ joylashtiramiz.

A_2 zapasi tugadi: $20 - 20 = 0$

B_2 talabi: $40 - 20 = 20$ qoladi.

Yangilangan jadval:

	$B_1(0)$	$B_2(20)$	$B_3(30)$	Zapas
$A_1(20)$	20			0
$A_2(0)$	10	20		0
$A_3(50)$	$c_{31} = 3$	$c_{32} = 6$	$c_{33} = 4$	50

A_2 tugagani uchun (3,2) katakka o'tamiz: $A_3 = 50, \quad B_2 = 20$. Eng kichigi $\min(50, 20) = 20$.

$x_{32} = 20$ joylashtiramiz. B_2 talabi tugadi ($20 - 20 = 0$), A_3 zapasi $50 - 20 = 30$ qoladi.

Jadval:

B_2 tugagani uchun (3,3) katakka o'tamiz: $A_3 = 30, \quad B_3 = 30$. Eng kichigi $\min(30, 30) = 30$.

	B1 (0)	B2 (0)	B3 (30)	Zapas
$A_1(20)$	20			0
$A_2(0)$	10	20		0
$A_3(30)$	$c_{31} = 3$	20	$c_{33} = 4$	30

$x_{33}=30$ joylashtiramiz. A_3 va B_3 tugaydi.

Yakuniy tayanch plan:

	B_1	B_2	B_3	Zapas
A_1	20			20
A_2	10	20		30
A_3		20	30	50
Talab	30	40	30	

Tayanch plan: $x_{11} = 20$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 20$, $x_{32} = 20$, $x_{33} = 30$.

Umumiy xarajat:

$$Z = (20 \times 2) + (10 \times 4) + (20 \times 1) + (20 \times 6) + (30 \times 4)$$

$$= 40 + 40 + 20 + 120 + 120 = 340$$

Xulosa

Transport masalasi matematik dasturlash va optimallashtirish sohasida muhim ahamiyatga ega bo'lib, yuklarni jo'natish va qabul qilish punktlari o'rtasida xarajatlarni minimallashtirishga xizmat qiladi. Maqolada keltirilgan adabiyotlar transport masalasining nazariy asoslari, matematik modellari va yechish usullarini keng yoritadi. Shimoliy-g'arb burchak, kichik elementlar va potentsiallar usullari kabi algoritmlar boshlang'ich tayanch plan tuzish va optimal yechim topishda samarali ekanligi ko'rsatildi. Misolda "shimoliy-g'arb burchak" usuli yordamida tayanch plan tuzilib, umumiy xarajat 340 birikka teng bo'ldi, bu usulning amaliy qo'llanilishini tasdiqlaydi. Excel va Python kabi zamonaviy vositalar hisoblash jarayonlarini avtomatlashtirish imkonini beradi. Transport masalasi yopiq va ochiq turlarga bo'linib, har bir tur uchun mos yechim strategiyalari mavjud. Ushbu tadqiqot transport masalasini o'rganuvchilar va logistika sohasi mutaxassislari uchun muhim manba bo'lib, nazariy bilimlarni amaliy qo'llashga yo'l ochadi. Kelgusida ushbu usullarni murakkab real dunyo muammolariga tatbiq etish va avtomatlashtirishni yanada rivojlantirish muhim yo'nalish sifatida qolmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа, 1996.
2. Badalov F.B. Optimallashtirish nazariyasi va matematik dasturlash. – Toshkent: O'zbekiston, 1989.
3. Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. – Москва: Изд-во МГУ, 1985.

4. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel. – Санкт-Петербург: BHV-Петербург, 1997.
5. Safaeva K., Beknazarova N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. – Toshkent: Fan, 1984.